Bab 8: Operator, Observable, dan Pengukuran

Pada bab-bab sebelumnya kita telah memakai fungsi gelombang ψ(x,t) untuk menyatakan keadaan kuantum. Kita juga telah bertemu beberapa besaran fisika: posisi, momentum, energi, dan probabilitas. Namun dalam mekanika kuantum, besaran-besaran ini tidak diperlakukan sekadar sebagai angka biasa.

Dalam mekanika klasik, jika sebuah partikel memiliki posisi x dan momentum p, maka pada suatu saat tertentu keduanya dianggap mempunyai nilai pasti. Kita dapat menulis energi partikel bebas sebagai

$$E = \frac{p^2}{2m}.$$

Dalam mekanika kuantum, keadaan sistem dinyatakan oleh vektor keadaan atau fungsi gelombang, sedangkan besaran fisika dinyatakan oleh operator. Operator adalah objek matematis yang bekerja pada keadaan. Misalnya, operator momentum dalam representasi posisi bekerja pada fungsi gelombang dengan cara mengambil turunannya:

$$\hat{p}\psi(x) = -i\hbar\frac{d\psi}{dx}.$$

Tanda topi pada hat p mengingatkan kita bahwa ini bukan angka momentum biasa, melainkan operator momentum.

Bab ini memperkenalkan bahasa operator secara sistematis. Kita akan melihat mengapa operator linear menjadi pusat mekanika kuantum, mengapa observable diwakili oleh operator Hermitian atau, lebih tepat secara matematis, operator self-adjoint, bagaimana nilai ukur muncul sebagai eigenvalue, bagaimana probabilitas hasil ukur dihitung, dan apa yang dimaksud dengan perubahan keadaan akibat pengukuran ideal. Struktur ini merupakan bagian inti dari formulasi modern mekanika kuantum, yang dikembangkan dan disistematisasi dalam karya Dirac dan von Neumann pada awal abad ke-20 (Dirac, 1930; von Neumann, 1955).

8.1 Dari fungsi gelombang menuju operator

Kita mulai dari gagasan paling sederhana.

Misalkan kita mempunyai fungsi gelombang satu dimensi ψ(x).

Sebuah operator adalah aturan yang mengubah suatu fungsi menjadi fungsi lain. Sebagai contoh, operator posisi hat x didefinisikan dengan

$$(\hat{x}\psi)(x) = x\psi(x).$$

Artinya, operator hat x mengambil fungsi ψ(x), lalu menghasilkan fungsi baru xψ(x).

Contoh lain adalah operator turunan

$$\frac{d}{dx}.$$

Jika operator ini bekerja pada ψ(x), hasilnya adalah

$$\frac{d\psi}{dx}.$$

Dalam mekanika kuantum, operator momentum satu dimensi dalam representasi posisi adalah

$$\hat{p} = -i\hbar\frac{d}{dx}.$$

Jadi,

$$(\hat{p}\psi)(x) = -i\hbar\frac{d\psi}{dx}.$$

Operator energi total biasanya disebut Hamiltonian, ditulis hat H. Untuk partikel bermassa m dalam potensial V(x), Hamiltonian satu dimensi adalah

$$\hat{H} = \frac{\hat{p}^2}{2m} + V(\hat{x}).$$

Dalam representasi posisi, ini menjadi

$$\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + V(x).$$

Inilah operator yang muncul dalam persamaan Schrödinger tak bergantung waktu:

$$\hat{H}\psi = E\psi.$$

Kita akan segera melihat bahwa bentuk persamaan seperti ini adalah contoh dari persamaan eigenvalue.

8.2 Operator linear

Tidak semua aturan yang mengubah fungsi menjadi fungsi lain sama pentingnya. Dalam mekanika kuantum, operator yang paling mendasar adalah operator linear.

Sebuah operator hat A disebut linear jika untuk dua keadaan ψ dan φ, serta dua bilangan kompleks a dan b, berlaku

$$\hat{A}(a\psi + b\phi) = a\hat{A}\psi + b\hat{A}\phi.$$

Definisi ini mengatakan bahwa operator hat A menghormati superposisi.

Ini penting karena superposisi adalah struktur dasar keadaan kuantum. Jika ψ dan φ adalah keadaan yang mungkin, maka kombinasi

$$a\psi + b\phi$$

juga dapat menjadi keadaan yang mungkin, setelah dinormalisasi. Karena itu, aturan matematis yang mewakili besaran fisika harus cocok dengan struktur superposisi tersebut.

Contoh 1: operator posisi linear

Operator posisi memenuhi

$$\hat{x}(a\psi + b\phi) = x(a\psi + b\phi).$$

Karena perkalian biasa bersifat distributif,

$$x(a\psi + b\phi) = ax\psi + bx\phi.$$

Jadi,

$$\hat{x}(a\psi + b\phi) = a\hat{x}\psi + b\hat{x}\phi.$$

Maka hat x adalah operator linear.

Contoh 2: operator momentum linear

Operator momentum juga linear:

$$\hat{p}(a\psi + b\phi) = -i\hbar\frac{d}{dx}(a\psi + b\phi).$$

Karena turunan bersifat linear,

$$\frac{d}{dx}(a\psi + b\phi) = a\frac{d\psi}{dx} + b\frac{d\phi}{dx}.$$

Maka

$$\hat{p}(a\psi + b\phi) = a\hat{p}\psi + b\hat{p}\phi.$$

Jadi hat p linear.

Contoh 3: aturan yang tidak linear

Sebaliknya, aturan

$$N(\psi) = |\psi|^2$$

bukan operator linear pada fungsi gelombang. Sebab umumnya

$$|a\psi + b\phi|^2 \neq a|\psi|^2 + b|\phi|^2.$$

Rapat probabilitas $|\psi|^2$ sangat penting secara fisika, tetapi aturan mengambil modulus kuadrat bukan operator linear pada ruang keadaan.

8.3 Vektor keadaan dan notasi Dirac

Pada Bab 7 kita telah mulai memakai gagasan ruang Hilbert, yaitu ruang vektor kompleks dengan hasil kali dalam. Dalam bahasa ini, keadaan kuantum dapat ditulis sebagai vektor

$$|\psi\rangle.$$

Notasi ini disebut notasi Dirac, atau bra-ket notation, dan menjadi salah satu bahasa standar mekanika kuantum sejak Dirac menggunakannya secara sistematis dalam formulasi teorinya (Dirac, 1930).

Simbol

$$|\psi\rangle$$

disebut ket. Pasangannya,

$$\langle\psi|,$$

disebut bra. Hasil kali dalam antara dua keadaan ditulis

$$\langle\phi|\psi\rangle.$$

Dalam representasi posisi, ket $|\psi\rangle$ berhubungan dengan fungsi gelombang melalui

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle.$$

Di sini $|x\rangle$ dapat dipahami sebagai keadaan posisi ideal. Secara matematis, $|x\rangle$ bukan fungsi gelombang normal biasa, melainkan objek umum yang diperlakukan dengan hati-hati dalam teori distribusi. Namun untuk perhitungan fisika tingkat awal, notasi ini sangat berguna dan konsisten jika digunakan secara tepat, sebagaimana dijelaskan dalam banyak buku teks mekanika kuantum modern (Griffiths & Schroeter, 2018; Shankar, 1994).

Dalam notasi Dirac, operator hat A bekerja pada ket:

$$\hat{A}|\psi\rangle.$$

Hasilnya adalah ket baru.

8.4 Eigenvalue dan eigenstate

Sekarang kita masuk ke konsep yang sangat penting: eigenvalue dan eigenstate.

Misalkan sebuah operator hat A bekerja pada keadaan |a⟩. Jika hasilnya hanya mengalikan keadaan itu dengan suatu bilangan a, yaitu

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle,$$

maka |a⟩ disebut eigenstate dari operator hat A, dan a disebut eigenvalue-nya.

Dalam bahasa Indonesia, kadang eigenstate disebut keadaan eigen, dan eigenvalue disebut nilai eigen.

Makna fisiknya sangat penting:

> Jika sistem berada dalam eigenstate suatu observable, maka pengukuran observable itu memberikan eigenvalue terkait dengan kepastian.

Contohnya, jika

$$\hat{H}|E\rangle = E|E\rangle,$$

maka |E⟩ adalah keadaan energi pasti, dan E adalah nilai energi yang akan diperoleh jika energi diukur.

Contoh: partikel dalam sumur potensial tak hingga

Untuk partikel dalam sumur potensial tak hingga dari x=0 sampai x=L, keadaan stasioner yang telah dipelajari sebelumnya adalah

$$u_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right),$$

dengan

$$n = 1, 2, 3, \ldots$$

Fungsi-fungsi ini memenuhi

$$\hat{H} u_n = E_n u_n,$$

dengan

$$E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}.$$

Jadi u_n adalah eigenfunction Hamiltonian, dan E_n adalah eigenvalue energi.

Jika sistem berada dalam keadaan u_3, maka pengukuran energi ideal akan menghasilkan

$$E_3 = \frac{9\pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$$

dengan probabilitas 1.

8.5 Operator Hermitian dan mengapa nilai ukur harus real

Hasil pengukuran fisika, seperti posisi, momentum, dan energi, harus berupa bilangan real. Kita tidak pernah mengukur energi sebesar 3+2i joule. Karena itu, operator yang mewakili besaran terukur harus mempunyai eigenvalue real.

Operator yang memiliki sifat ini, dalam formulasi fisika dasar, disebut operator Hermitian. Dalam bahasa matematika yang lebih teliti, terutama untuk operator tak terbatas seperti posisi dan momentum, istilah yang tepat adalah self-adjoint. Pada ruang berdimensi hingga, kedua istilah ini sering berimpit; pada ruang fungsi berdimensi tak hingga, domain operator harus diperhatikan dengan lebih hati-hati (von Neumann, 1955; Shankar, 1994). Dalam buku ini, kita akan memakai istilah "Hermitian" dalam arti fisika standar, sambil mengingat bahwa ketelitian matematis penuh membutuhkan konsep self-adjoint.

Untuk mendefinisikan Hermitian, kita perlu memakai hasil kali dalam.

Operator hat A disebut Hermitian jika

$$\langle \phi | \hat{A}\psi \rangle = \langle \hat{A}\phi | \psi \rangle$$

untuk semua keadaan φ dan ψ yang berada dalam domain operator tersebut.

Dalam notasi adjoint, syarat ini ditulis

$$\hat{A}^\dagger = \hat{A}.$$

Simbol hat A^† disebut adjoint dari hat A. Untuk matriks, adjoint berarti transpose kompleks: matriks ditransposisikan lalu setiap elemennya dikonjugasikan kompleks.

Contoh: matriks Hermitian sederhana

Misalkan

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}.$$

Matriks ini Hermitian karena

$$A^\dagger = A.$$

Eigenvalue-nya adalah 2 dan 5, keduanya real.

Contoh lain:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix}.$$

Adjoint dari B adalah

$$B^\dagger = \begin{pmatrix} 1 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix} = B.$$

Jadi B juga Hermitian. Walaupun elemennya mengandung bilangan kompleks, eigenvalue-nya tetap real.

Mengapa eigenvalue operator Hermitian real?

Misalkan

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle,$$

dan hat A Hermitian. Ambil hasil kali dalam dengan ⟨ a|:

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle = a\langle a|a\rangle.$$

Karena hat A Hermitian, nilai harapan

$$\langle a|\hat{A}|a\rangle$$

harus sama dengan konjugat kompleksnya sendiri, sehingga real. Sementara itu, ⟨ a|a⟩ adalah norma kuadrat dan bernilai real positif jika |a⟩≠ 0. Maka a harus real.

Jadi, Hermitian bukan syarat kosmetik. Ia memastikan bahwa nilai ukur yang mungkin memang bilangan real.

8.6 Observable

Sekarang kita dapat mendefinisikan kata penting berikutnya.

Observable adalah besaran fisika yang dapat diukur, seperti posisi, momentum, energi, momentum sudut, atau spin. Dalam mekanika kuantum nonrelativistik, observable direpresentasikan oleh operator Hermitian atau self-adjoint pada ruang Hilbert sistem (von Neumann, 1955; Griffiths & Schroeter, 2018).

Contoh:

Observable	**Operator**
Posisi satu dimensi	hat x
Momentum satu dimensi	hat p=-ihbar (d)⁄(dx)
Energi total	hat H=(hat p²)⁄(2m)+V(hat x)

Jika kita mengukur observable hat A, maka hasil yang mungkin adalah eigenvalue dari hat A.

Ini adalah salah satu perbedaan mendasar antara mekanika klasik dan mekanika kuantum. Dalam mekanika klasik, nilai besaran fisika dianggap sudah ada sebelum pengukuran. Dalam mekanika kuantum, keadaan umum tidak harus memiliki nilai pasti untuk semua observable. Hanya jika keadaan merupakan eigenstate observable tersebut, hasil pengukurannya pasti.

8.7 Ekspansi keadaan dalam basis eigen

Sebuah gagasan kunci mekanika kuantum adalah bahwa keadaan umum dapat ditulis sebagai superposisi keadaan eigen suatu observable.

Misalkan operator hat A memiliki eigenstate ortonormal

$$|a_1\rangle, |a_2\rangle, |a_3\rangle, \ldots$$

dengan

$$\hat{A}|a_n\rangle = a_n|a_n\rangle.$$

Jika eigenstate-eigenstate ini membentuk basis lengkap, maka keadaan umum |ψ⟩ dapat ditulis sebagai

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle.$$

Koefisien

$$c_n = \langle a_n|\psi\rangle$$

disebut amplitudo probabilitas untuk komponen $|a_n\rangle$.

Karena keadaan harus ternormalisasi,

$$\langle\psi|\psi\rangle = 1,$$

maka untuk basis ortonormal berlaku

$$\sum_n |c_n|^2 = 1.$$

Makna fisiknya akan muncul pada aturan pengukuran.

Contoh: superposisi dua keadaan energi

Misalkan sebuah sistem memiliki dua keadaan energi ortonormal $|E_1\rangle$ dan $|E_2\rangle$. Keadaan sistem adalah

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|E_2\rangle.$$

Keadaan ini sudah ternormalisasi karena

$$\left|\sqrt{\frac{1}{3}}\right|^2 + \left|\sqrt{\frac{2}{3}}\right|^2 = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1.$$

Jika energi diukur, hasilnya tidak dapat diprediksi secara pasti. Tetapi probabilitasnya dapat dihitung:

$$P(E_1) = \frac{1}{3},$$

dan

$$P(E_2) = \frac{2}{3}.$$

Jadi superposisi bukan berarti sistem "setengah berada di energi E_1 dan setengah berada di energi E_2" dalam arti klasik. Superposisi berarti keadaan memiliki amplitudo terhadap beberapa kemungkinan hasil ukur.

8.8 Aturan Born untuk probabilitas hasil ukur

Aturan probabilitas dalam mekanika kuantum berasal dari interpretasi Born: amplitudo kompleks tidak langsung menjadi probabilitas; probabilitas diperoleh dari modulus kuadrat amplitudo (Born, 1926).

Jika keadaan sistem adalah

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle,$$

dan $|a_n\rangle$ adalah eigenstate observable hat A, maka probabilitas memperoleh hasil ukur a_n adalah

$$P(a_n) = |c_n|^2.$$

Karena

$$c_n = \langle a_n|\psi\rangle,$$

kita juga dapat menulis

$$P(a_n) = |\langle a_n|\psi\rangle|^2.$$

Ini adalah bentuk diskrit dari aturan Born.

Contoh: pengukuran energi pada sumur tak hingga

Misalkan partikel dalam sumur tak hingga memiliki keadaan

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{1}{4}}u_1(x) + \sqrt{\frac{3}{4}}u_2(x),$$

dengan u_1 dan u_2 adalah eigenfunction energi.

Karena

$$\hat{H}u_1 = E_1 u_1,$$

dan

$$\hat{H}u_2 = E_2 u_2,$$

maka pengukuran energi hanya dapat menghasilkan E_1 atau E_2, dengan probabilitas

$$P(E_1) = \frac{1}{4},$$

dan

$$P(E_2) = \frac{3}{4}.$$

Jika kita melakukan banyak pengukuran pada banyak sistem yang disiapkan dalam keadaan sama ψ, kira-kira seperempat hasil akan memberikan E_1, dan kira-kira tiga perempat hasil akan memberikan E_2. Untuk satu sistem tunggal, teori hanya memberikan probabilitas.

8.9 Nilai harapan observable

Walaupun hasil pengukuran tunggal bersifat probabilistik, kita sering dapat menghitung rata-rata yang diharapkan dari banyak pengukuran identik. Rata-rata ini disebut nilai harapan, ditulis

$$\langle A \rangle.$$

Jika keadaan sistem adalah |ψ⟩, nilai harapan observable hat A adalah

$$\langle A \rangle = \langle \psi | \hat{A} | \psi \rangle.$$

Dalam representasi posisi, untuk operator hat A, bentuknya dapat ditulis

$$\langle A \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \psi^*(x)(\hat{A}\psi)(x)\, dx.$$

Contoh: nilai harapan energi

Jika

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |E_n\rangle,$$

dengan

$$\hat{H}|E_n\rangle = E_n|E_n\rangle,$$

maka

$$\langle H \rangle = \sum_n |c_n|^2 E_n.$$

Ini mirip rata-rata probabilistik biasa: setiap energi E_n dikalikan probabilitasnya $|c_n|^2$, lalu dijumlahkan.

Misalnya,

$$|\psi\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}}|E_1\rangle + \sqrt{\frac{2}{3}}|E_2\rangle.$$

Maka

$$\langle H \rangle = \frac{1}{3}E_1 + \frac{2}{3}E_2.$$

Perhatikan bahwa nilai harapan tidak harus sama dengan salah satu hasil ukur yang mungkin. Jika E_1=1 eV dan E_2=4 eV, maka

$$\langle H \rangle = \frac{1}{3}(1\,\mathrm{eV}) + \frac{2}{3}(4\,\mathrm{eV}) = 3\,\mathrm{eV}.$$

Tetapi pengukuran tunggal hanya menghasilkan 1 eV atau 4 eV, bukan 3 eV.

8.10 Degenerasi

Sebuah eigenvalue disebut degenerate jika ada lebih dari satu eigenstate bebas linear yang memiliki eigenvalue yang sama.

Misalkan

$$\hat{A}|a,1\rangle = a|a,1\rangle,$$

dan

$$\hat{A}|a,2\rangle = a|a,2\rangle,$$

dengan |a,1⟩ dan |a,2⟩ bukan kelipatan satu sama lain. Maka eigenvalue a bersifat degenerate.

Degenerasi sering muncul karena simetri. Misalnya, pada sistem tiga dimensi dengan simetri rotasi, beberapa keadaan yang berbeda arah dapat memiliki energi sama. Pada atom hidrogen, degenerasi energi muncul dalam pendekatan nonrelativistik ideal karena energi hanya bergantung pada bilangan kuantum utama n, bukan pada semua bilangan kuantum orbital. Hal ini akan dibahas lebih lengkap pada Bab 14.

Untuk saat ini, yang penting adalah memahami akibat degenerasi terhadap pengukuran.

Jika hasil pengukuran hat A adalah eigenvalue nondegenerate a_n, maka keadaan setelah pengukuran ideal menjadi eigenstate tunggal $|a_n\rangle$. Tetapi jika a degenerate, hasil ukur a hanya memberi tahu bahwa sistem berada dalam subruang eigen yang berkaitan dengan a, bukan dalam satu eigenstate tertentu di dalam subruang itu.

Secara matematis, kita memakai operator proyeksi P_a ke subruang eigenvalue a. Probabilitas memperoleh hasil a adalah

$$P(a) = \langle\psi|P_a|\psi\rangle.$$

Jika hasil a diperoleh, keadaan setelah pengukuran ideal menjadi

$$|\psi'\rangle = \frac{P_a|\psi\rangle}{\sqrt{\langle\psi|P_a|\psi\rangle}}.$$

Rumus ini adalah bentuk umum dari aturan proyeksi untuk pengukuran ideal, yang berakar pada formulasi von Neumann tentang pengukuran kuantum (von Neumann, 1955).

8.11 Pengukuran ideal dan perubahan keadaan

Sekarang kita sampai pada salah satu aspek paling khas mekanika kuantum: pengukuran tidak hanya membaca keadaan, tetapi dapat mengubah keadaan.

Dalam pengukuran ideal observable hat A, jika sistem mula-mula berada dalam keadaan

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n|a_n\rangle,$$

maka hasil pengukuran yang mungkin adalah a_n, dengan probabilitas

$$P(a_n) = |c_n|^2.$$

Jika hasil yang diperoleh adalah a_k, maka setelah pengukuran keadaan berubah menjadi

$$|a_k\rangle$$

untuk kasus nondegenerate.

Perubahan ini sering disebut kolaps fungsi gelombang atau reduksi keadaan. Istilah ini harus digunakan dengan hati-hati. Dalam formulasi standar, ia adalah aturan untuk memperbarui keadaan setelah hasil pengukuran diketahui. Untuk pengukuran ideal, jika pengukuran yang sama langsung diulang, hasilnya akan sama dengan probabilitas 1. Inilah salah satu alasan mengapa keadaan setelah pengukuran harus menjadi eigenstate dari observable yang baru saja diukur.

Contoh: pengukuran dua hasil

Misalkan

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|a_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{2}}|a_2\rangle.$$

Pengukuran hat A dapat menghasilkan a_1 atau a_2, masing-masing dengan probabilitas

$$P(a_1) = \frac{1}{2},$$

dan

$$P(a_2) = \frac{1}{2}.$$

Jika hasil pertama adalah a_2, maka keadaan setelah pengukuran ideal menjadi

$$|a_2\rangle.$$

Jika pengukuran hat A segera diulang, hasilnya pasti a_2, karena

$$\hat{A}|a_2\rangle = a_2|a_2\rangle.$$

Ini berbeda dari probabilitas klasik biasa. Dalam probabilitas klasik, pengukuran sering dianggap hanya mengungkap nilai yang sebelumnya sudah ada. Dalam mekanika kuantum, untuk keadaan superposisi terhadap basis observable yang diukur, pengukuran ideal mengubah keadaan menjadi keadaan yang sesuai dengan hasil yang diperoleh.

8.12 Observable dengan spektrum kontinu

Sejauh ini kita banyak membicarakan eigenvalue diskrit, seperti energi partikel dalam sumur tak hingga. Namun beberapa observable memiliki spektrum kontinu.

Contoh paling penting adalah posisi. Operator posisi memenuhi

$$\hat{x}|x\rangle = x|x\rangle.$$

Nilai x dapat berubah kontinu, bukan hanya $x_1, x_2, x_3, \ldots$. Dalam representasi posisi,

$$\psi(x) = \langle x|\psi\rangle.$$

Aturan Born untuk posisi menyatakan bahwa

$$|\psi(x)|^2 dx$$

adalah probabilitas menemukan partikel di interval kecil antara x dan x+dx. Maka probabilitas menemukan partikel dalam interval [a,b] adalah

$$P(a \le x \le b) = \int_a^b |\psi(x)|^2 \, dx.$$

Ini sesuai dengan pembahasan Bab 4 tentang interpretasi probabilistik.

Momentum juga memiliki spektrum kontinu untuk partikel bebas di ruang tak hingga. Jika fungsi gelombang momentum ditulis φ(p), maka

$$|\phi(p)|^2 dp$$

adalah probabilitas menemukan momentum antara p dan p+dp.

Secara formal, keadaan posisi |x⟩ dan keadaan momentum |p⟩ dinormalisasi menggunakan delta Dirac, bukan normalisasi biasa. Notasi ini diperkenalkan dan dipakai secara luas dalam tradisi Dirac, walaupun fondasi matematisnya memerlukan kehati-hatian lebih lanjut (Dirac, 1930; Shankar, 1994).

8.13 Operator yang kompatibel dan gambaran awal komutator

Bab berikutnya akan membahas komutator secara khusus. Namun kita perlu sedikit melihat hubungannya dengan pengukuran.

Dua observable dikatakan kompatibel jika keduanya dapat memiliki nilai pasti secara bersamaan. Secara matematis, ini berkaitan dengan apakah operator-operatornya memiliki basis eigen bersama.

Jika dua operator hat A dan hat B memiliki eigenstate bersama |ψ⟩, maka

$$\hat{A}|\psi\rangle = a|\psi\rangle,$$

dan

$$\hat{B}|\psi\rangle = b|\psi\rangle.$$

Dalam keadaan itu, hat A dan hat B sama-sama memiliki nilai pasti.

Contoh sederhana adalah Hamiltonian hat H dan suatu operator lain yang komutatif dengannya dalam sistem tertentu. Jika keduanya memiliki basis eigen bersama, maka energi dan observable lain itu dapat ditentukan bersamaan.

Sebaliknya, posisi dan momentum tidak memiliki eigenstate normalizable bersama. Hubungan mendasarnya adalah

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

dengan

$$[\hat{x}, \hat{p}] = \hat{x}\hat{p} - \hat{p}\hat{x}.$$

Relasi ini akan menjadi pusat Bab 9. Untuk saat ini, cukup dipahami bahwa struktur operator menentukan batas-batas apa yang dapat diukur secara bersamaan dalam mekanika kuantum.

8.14 Ringkasan bab

Dalam bab ini kita membangun fondasi bahasa operator dalam mekanika kuantum.

Keadaan kuantum dinyatakan oleh vektor keadaan $|\psi\rangle$ dalam ruang Hilbert. Besaran fisika yang dapat diukur, atau observable, dinyatakan oleh operator Hermitian atau self-adjoint. Jika

$$\hat{A}|a\rangle = a|a\rangle,$$

maka $|a\rangle$ adalah eigenstate dari hat A, dan a adalah eigenvalue-nya. Untuk observable, eigenvalue adalah hasil ukur yang mungkin.

Jika keadaan umum ditulis sebagai superposisi

$$|\psi\rangle = \sum_n c_n |a_n\rangle,$$

maka probabilitas memperoleh hasil a_n adalah

$$P(a_n) = |c_n|^2.$$

Nilai harapan observable diberikan oleh

$$\langle A\rangle = \langle\psi|\hat{A}|\psi\rangle.$$

Untuk pengukuran ideal nondegenerate, jika hasilnya adalah a_k, keadaan setelah pengukuran menjadi

$$|a_k\rangle.$$

Jika eigenvalue bersifat degenerate, keadaan setelah pengukuran diproyeksikan ke subruang eigen yang sesuai.

Bab ini mempersiapkan kita untuk Bab 9. Di sana kita akan mempelajari komutator secara lebih dalam, terutama mengapa operator posisi dan momentum memenuhi

$$[\hat{x}, \hat{p}] = i\hbar,$$

dan bagaimana dari relasi sederhana ini muncul prinsip ketidakpastian Heisenberg.

References

Born, M. (1926). Zur Quantenmechanik der Stoßvorgänge. Zeitschrift für Physik, 37, 863–867.

Dirac, P. A. M. (1930). The Principles of Quantum Mechanics. Oxford: Clarendon Press.

Griffiths, D. J., & Schroeter, D. F. (2018). Introduction to Quantum Mechanics (3rd ed.). Cambridge University Press.

Shankar, R. (1994). Principles of Quantum Mechanics (2nd ed.). Plenum Press.

von Neumann, J. (1955). Mathematical Foundations of Quantum Mechanics (R. T. Beyer, Trans.). Princeton University Press. (Original work published 1932)

Document information

Bab 8: Operator, Observable, dan Pengukuran

Project	Mekanika Kuantum
Document	Document 1.12
Author	terry.mart
Verifier	Not verified
Downloaded	July 05, 2026 00:27 KST
Status	Working
Document link	https://theorytrace.com/projects/mekanika-kuantum/documents/bab-8-operator-observable-dan-pengukuran/